第 32 講　n 人を部屋に分ける

32　n 人を区別のつく k 部屋に分ける場合を考える．ここで，n と k は自然数で，$n \geqq k$ とする．また，各部屋には少なくとも１人以上が割り当てられるものとする．

(1)　$k=2$ のとき，分け方は何通りあるか求めよ．

(2)　$k=3$ のとき，分け方は何通りあるか求めよ．

(3)　$k=4$ のとき，分け方は何通りあるか求めよ．

(4)　$k=10$ のとき，分け方は何通りあると予想できるか．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 32 講　n 人を部屋に分ける

32　1から n までの番号をつけた n 枚のカードがある．これら n 枚のカードを A，B，C の 3 つの箱に分けて入れる．ただし，どの箱にも少なくとも 1 枚は入れるものとする．自然数 l は $2l \leqq n$ を満たすとする．$1 \leqq k \leqq l$ である各整数 k について $2k-1$ と $2k$ の番号のカードをペアと考える．いずれかの箱に少なくとも 1 つのペアが入る場合の数を n と l を用いて表せ.

【選択肢】

㋐　$3^n+3\cdot2^n-2^l\cdot3^{n-l}-3\cdot2^{n-l}+3$　　㋑　$3^n-3\cdot2^n-2^l\cdot3^{n-l}+3\cdot2^{n-l}+3$

㋒　$3^n-3\cdot2^n+2^l\cdot3^{n-l}+3\cdot2^{n-l}-3$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 32 講　n 人を部屋に分ける

32　n 人を区別のつく k 部屋に分ける場合を考える．ここで，n と k は自然数で，$n \geqq k$ とする．また，各部屋には少なくとも 1 人以上が割り当てられるものとする．

(1)　$k=2$ のとき，分け方は何通りあるか求めよ．

(2)　$k=3$ のとき，分け方は何通りあるか求めよ．

(3)　$k=4$ のとき，分け方は何通りあるか求めよ．

(4)　$k=10$ のとき，分け方は何通りあると予想できるか．

【答】 (1) 2^n-2（通り） (2) $3^n-3\cdot2^n+3$（通り） (3) $4^n-4\cdot3^n+6\cdot2^n-4$（通り）

(4) ${}_{10}\mathrm{C}_0 10^n-{}_{10}\mathrm{C}_1 9^n+{}_{10}\mathrm{C}_2 8^n-{}_{10}\mathrm{C}_3 7^n+{}_{10}\mathrm{C}_4 6^n-{}_{10}\mathrm{C}_5 5^n+{}_{10}\mathrm{C}_6 4^n-{}_{10}\mathrm{C}_7 3^n+{}_{10}\mathrm{C}_8 2^n-{}_{10}\mathrm{C}_9 1^n+{}_{10}\mathrm{C}_{10} 0^n$（通り）

【解答】

(1)　2 つの部屋に n 人を分ける 2^n 通りから，1 つの部屋に n 人が集中する 2 通りを除けばよいので，$\boldsymbol{2^n-2}$ **（通り）**

(2)　3 つの部屋に n 人を分ける 3^n 通りから，1 つの部屋に n 人が集中する 3 通りと，2 つの部屋だけに少なくとも 1 人ずつ分ける $3(2^n-2)$ 通りを除けばよいので

$3^n-3-3(2^n-2)=\boldsymbol{3^n-3\cdot2^n+3}$ **（通り）**

(3)　4 つの部屋に n 人を分ける 4^n 通りから，1 つの部屋に n 人が集中する 4 通りと，2 つの部屋だけに少なくとも 1 人ずつ分ける ${}_4\mathrm{C}_2(2^n-2)$ 通り，そして 3 つの部屋だけに少なくとも 1 人ずつ分ける ${}_4\mathrm{C}_3(3^n-3\cdot2^n+3)$ 通りを除けばよいので

$4^n-4-{}_4\mathrm{C}_2(2^n-2)-{}_4\mathrm{C}_3(3^n-3\cdot2^n+3)=\boldsymbol{4^n-4\cdot3^n+6\cdot2^n-4}$ **（通り）**

(4)　(1)〜(3)の結果の係数より，題意の分け方は

$${}_k\mathrm{C}_0 k^n-{}_k\mathrm{C}_1(k-1)^n+{}_k\mathrm{C}_2(k-2)^n+\cdots\cdots$$
$$+{}_k\mathrm{C}_{k-2}(-1)^{k-2}2^n+{}_k\mathrm{C}_{k-1}(-1)^{k-1}1^n+{}_k\mathrm{C}_k(-1)^k0^n \text{（通り）}$$

と推測される．

よって $k=10$ のとき

$$\boldsymbol{{}_{10}\mathrm{C}_0 10^n-{}_{10}\mathrm{C}_1 9^n+{}_{10}\mathrm{C}_2 8^n-{}_{10}\mathrm{C}_3 7^n+{}_{10}\mathrm{C}_4 6^n}$$
$$\boldsymbol{-{}_{10}\mathrm{C}_5 5^n+{}_{10}\mathrm{C}_6 4^n-{}_{10}\mathrm{C}_7 3^n+{}_{10}\mathrm{C}_8 2^n-{}_{10}\mathrm{C}_9 1^n+{}_{10}\mathrm{C}_{10} 0^n} \textbf{（通り）}$$

と予想できる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第32講　n 人を部屋に分ける

32　1から n までの番号をつけた n 枚のカードがある．これら n 枚のカードをA，B，Cの3つの箱に分けて入れる．ただし，どの箱にも少なくとも1枚は入れるものとする．自然数 l は $2l \leqq n$ を満たすとする．$1 \leqq k \leqq l$ である各整数 k について $2k-1$ と $2k$ の番号のカードをペアと考える．いずれかの箱に少なくとも1つのペアが入る場合の数を n と l を用いて表せ．

【選択肢】

㋐　$3^n+3\cdot 2^n-2^l\cdot 3^{n-l}-3\cdot 2^{n-l}+3$　㋑　$3^n-3\cdot 2^n-2^l\cdot 3^{n-l}+3\cdot 2^{n-l}+3$

㋒　$3^n-3\cdot 2^n+2^l\cdot 3^{n-l}+3\cdot 2^{n-l}-3$

【答】 ㋑

【解答】

まずは，ペアを考えないで，各箱に少なくとも1枚入る場合の数を考える．

1枚も入らなくてよいとすると 3^n 通り考えられるが，この中から2つの箱に入らない場合は3通りあり，1つの箱だけに入らない場合は $(2^n-2)\times 3$ 通りあるので

$$3^n-3(2^n-2)-3=3^n-3\cdot 2^n+3 \text{（通り）}$$

次に，1と2，3と4，……，$2l-1$ と $2l$ の l 組について各ペアのカードが異なる箱に入る場合は

$$3\times 2=6 \text{（通り）}$$

あるので，l 組すべての2つのカードが異なる箱に入るのは 6^l 通りとなる．残り $n-2l$ 枚の分け方は 3^{n-2l} 通りで，計

$$6^l\times 3^{n-2l} \text{（通り）}$$

であるが，この中で1枚も入らない箱がある場合は

$$2^l\times 2^{n-2l}\times 3 \text{（通り）}$$

あるので，求める場合の数は

$$(3^n-3\cdot 2^n+3)-(6^l\cdot 3^{n-2l}-2^l\cdot 2^{n-2l}\cdot 3)$$

$$=\mathbf{3^n-3\cdot 2^n-2^l\cdot 3^{n-l}+3\cdot 2^{n-l}+3} \text{（通り）}$$

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。